

## АЛЬТЕРНАТИВНА РЕАЛІЗАЦІЯ ДИСТРИБУТИВНОЇ ДВОПРОМЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ОСВІТЛЕННЯ БЛІНА ТА ФОНГА

Романюк О.Н.

Вінницький національний технічний університет, м.Вінниця  
кафедра програмного забезпечення

E-mail : [ran@vstu.vinnica.ua](mailto:ran@vstu.vinnica.ua)

### Abstract

**Romanyuk O.N. Bi-directional distributive function alternative realization for Blinn and Phong lighting models.** In given paper is proposed the alternative form for Blinn and Phong bi-directional distributive function determination, which is characterized by a simple hardware realization.

**Загальна постановка проблеми.** Формування високореалістичних зображень є актуальною задачею комп'ютерної графіки, оскільки стрімкий розвиток обчислювальної техніки підвищує вимоги до точного відтворення об'єктів реального світу. При цьому важлива передача як конструктивних, так і візуальних особливостей об'єкту.

Однією з найбільш трудомістких процедур рендерингу є процедура зафарбовування, згідно з якою для кожної точки поверхні визначається інтенсивність кольору та екранні координати. При визначенні інтенсивності кольору точок зображення враховують розташування джерела світла та спостерігача, оптичні властивості матеріалу, спектральні характеристики джерела світла, кривизну поверхні. У зв'язку з цим реалізація зафарбовування характеризується значними обчислювальними витратами, що обумовлює необхідність розробки методів і засобів для підвищення продуктивності її реалізації.

**Аналіз методів і постановка задачі дослідження.** Для зафарбовування тривимірних графічних сцен найбільшого поширення отримали методи Гуро [1] і Фонга [2]. В обох методах графічний об'єкт попередньо триангулюється і в подальшому зафарбовуванню підлягають складові трикутники.

У методі Гуро розраховуються значення інтенсивностей для полігональних вершин, які потім у процесі растеризації лінійно інтерполюються вздовж ребер і рядків сканування.

На даному етапі розвитку комп'ютерної графіки більш перспективним важаться метод Фонга, в якому замість значень інтенсивності кольору інтерполюються вектори нормалей, які потім використовуються у функції тонування для обчислення інтенсивності кольору кожного елемента зображення. Метод характеризується по відношенню до методу Гуро значно більшими обчислювальними витратами, однак при цьому досягається краща локальна апроксимація кривизни поверхні і, як наслідок, отримують більш реалістичні зображення. При зафарбовуванні за методом Фонга інтенсивність кольору точок визначають за формулою [3,4]:

$$I = I_a k_a + I_l (k_d \cos \psi + k_s \cos^n \lambda),$$

де  $I_a, I_l$  — інтенсивності відповідно розсіяного і направлено джерел світла,  $k_a, k_d, k_s$  — коефіцієнти розсіяного, дифузійного і дзеркального світла,  $\psi$  — кут між напрямком світла і вектором нормалі,  $\lambda$  — кут між відбитим напрямком світла і спостерігачем,  $n$  — коефіцієнт яскравості поверхні,  $\cos^n \lambda$  — дистрибутивна функція (BRDF), яка відповідає за оптичні характеристики поверхні.

У більшості випадків при реалізації зафарбовування за Фонгом використовуються моделі освітлення Бліна [5] та Фонга [2,3]. При використанні моделі освітлення Фонга (рис.1)  $\cos \lambda = \vec{R} \cdot \vec{V} = 2(\vec{L} \cdot \vec{V})(\vec{N} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \cdot \vec{L}$ . Для моделі освітлення Бліна  $\cos \lambda$  заміняють на  $\cos \gamma = \vec{H} \cdot \vec{L}$ , де  $\vec{H} = (\vec{L} + \vec{V}) / |\vec{L} + \vec{V}|$ .

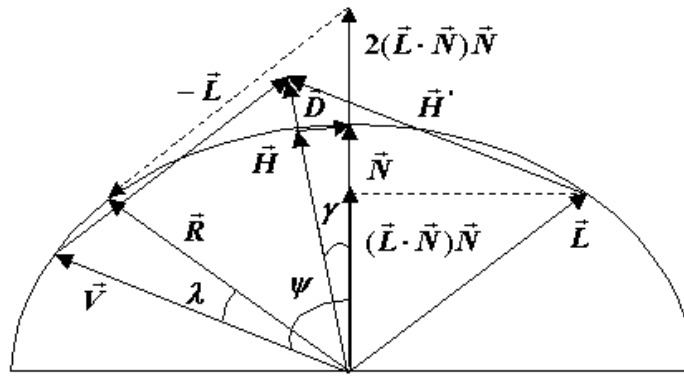


Рисунок 1 — Визначення кутів для моделей освітлення Фонга і Бліна

При зафарбовуванні поверхонь згідно з методом Фонга найбільш трудомістким є обчислення функції  $\cos^n \gamma$ , яка використовується в моделях освітлення Бліна та Фонга. Слід відмітити, що  $n$  змінюється в діапазоні від 0 до 1000.

Для зберігання значень функції  $\cos^n \gamma$  необхідно використовувати двовимірні таблиці загальним обсягом більшим, ніж 4 Мбайти [6].

К. Шлік [7] запропонував апроксимувати функцію  $\cos^n \gamma$ , яку використовують для розрахунку інтенсивності дзеркальної складової кольору в моделі освітлення Бліна, функцією  $\cos \gamma / (n - n \cos \gamma + \cos \gamma)$ . Аналіз показав, що такий підхід забезпечує задовільну якість відображення тільки для епіцентру відблиску. За цією областю спостерігається суттєве розходження з результатами, отриманими згідно з моделлю освітлення Бліна. Крім того, при апроксимації  $\cos^n \gamma$  використовують операцію ділення, що ускладнює апаратну реалізацію методу.

У методі [8], який запропонував Р.Ф. Ліон, функцію  $\cos^n \gamma$  розкладають у ряд Тейлора і замість кута  $\lambda$  між відбитим напрямком світла та спостерігачем використовують довжину хорди між зазначеними векторами:

$$\gamma = |\vec{D}| = |\vec{N} - \vec{H}|.$$

Вираз  $1/\sqrt{\vec{N} \cdot \vec{N}}$ , який використовується для нормалізації вектора нормалі  $\vec{N}$ , також розкладають у ряд Тейлора. При цьому обмежуються першими трьома членами. Це дозволяє виключити з обчислювального процесу операції ділення та розрахунку квадратного корня. Слід відмітити, що заміна кута на довжину хорди не сильно позначається на точності розрахунків тільки для невеликих значень кутів, а використання обмеженої кількості членів ряду Тейлора не дозволяє з достатньою точністю виконати нормалізацію векторів нормалей та апроксимувати функцію  $\cos^n \lambda$ .

Достань високу точність апроксимації досягнуто за рахунок апроксимації функції  $\cos^n \lambda$  функцією  $\cos^k(\sqrt{n/k} \cdot \lambda)$  [9], де  $k = 2, 4, 8, \dots$  і вибирається у залежності від діапазону  $n$ . На жаль, для такого підходу необхідно визначити кут  $\lambda$ , що передбачає використання трудомісткої функції  $\arccos$ .

**Розв'язок задачі і результати досліджень.** Розглянемо апроксимацію функції  $\cos^n \lambda$  більш простою, яка має значно меншу обчислювальну складність.

Запишемо функцію  $\cos^n \lambda$  у еквівалентному виді:

$$\cos^n \lambda = 2^{n \cdot \log_2(\cos \lambda)} \quad (1)$$

При відтворенні спекулярної складової кольору жорсткі вимоги до точності пред'являються при відображенні епіцентру відблиску [10]. Для периферійних областей, для яких має місце затухання інтенсивності світла до мінімального значення, необхідно забезпечити монотонність зміни інтенсивності кольору, яка виключає появу артефактів. При цьому вимог до точності визначення інтенсивності кольору не пред'являють.

Епіцентр відблиску має місце за умови, що кут  $\lambda$  наближається до нуля. Зони затухання відблиску мають місце при  $\cos^n \lambda \rightarrow 0$ . У безпосередній близькості до цього значення точне визначення  $\log_2(\cos \lambda)$  недоцільно, оскільки отримані інтенсивності кольору візуально не розрізняються.

Блок для визначення  $\cos^n \lambda$  згідно виразу (1) наведено на рис. 2. Він включає всього три блоки : постійної пам'яті для зберігання  $\log_2(\cos \lambda)$  ,множення та визначення  $2^x$ .

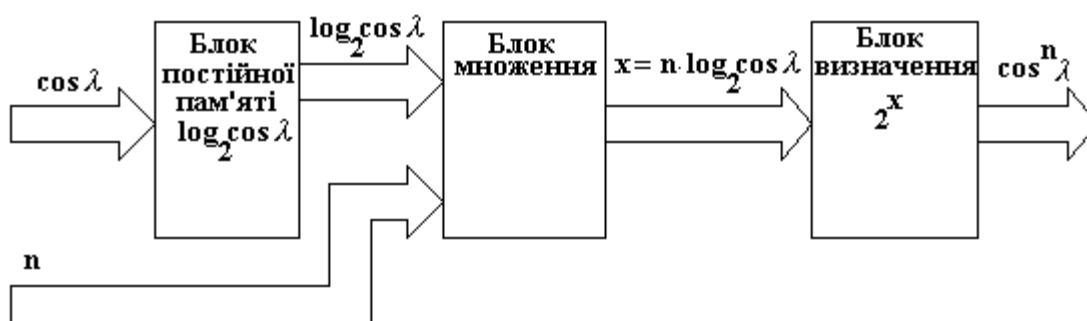


Рисунок 2 — Блок для визначення функції  $\cos^n \lambda$

Кусково-лінійна апроксимація функції в ряд Чебішева [11] має такий вигляд:

$$\begin{array}{ll}
 0,585 \cdot x + 0,993 & \text{при } -0,5 < x \leq 0, \quad \delta < 0,845\%; \\
 0,413 \cdot x + 0,909 & \text{при } -1 < x \leq -0,5, \quad \delta < 0,845\%; \\
 2^x \approx 0,248 \cdot x + 0,736 & \text{при } -2 < x \leq -1, \quad \delta < 3,816\% \\
 0,124 \cdot x + 0,492 & \text{при } -3 < x \leq -2, \quad \delta < 3,816\%; \\
 0,062 \cdot x + 0,308 & \text{при } -4 < x \leq -3, \quad \delta < 3,816\%.
 \end{array} \quad (2)$$

Зменшення похибки апроксимації та кількості інтервалів можна досягти при використанні поліномів більш високого порядку. Так, наприклад, при апроксимації поліномами Чебішева другого порядку відносна похибка не перевищує 2,4 % при використанні всього двох сегментів (рис.3.).

Якщо до відображення відблиску висуваються жорсткі умови по точності, то доцільно функцію  $2^x$  апроксимувати на відрізку  $[-1,0]$ . На рис.4 зображено залежність відносної похибки апроксимації від значення аргументу для вказаного відрізка.

На рис.5 зображено структурну схему для визначення  $2^x$  за умови використання для обчислення виразів (2).

Значення граничних точок інтервалів подається на схему порівняння, вихідні сигнали з якої поступають на керуючі входи мультіплексора, на інформаційні входи якого подають

значення коефіцієнтів для виразів (2). Із використанням блоку множення та суматора обчислюють конкретний вираз, який визначається заданим інтервалом апроксимації.

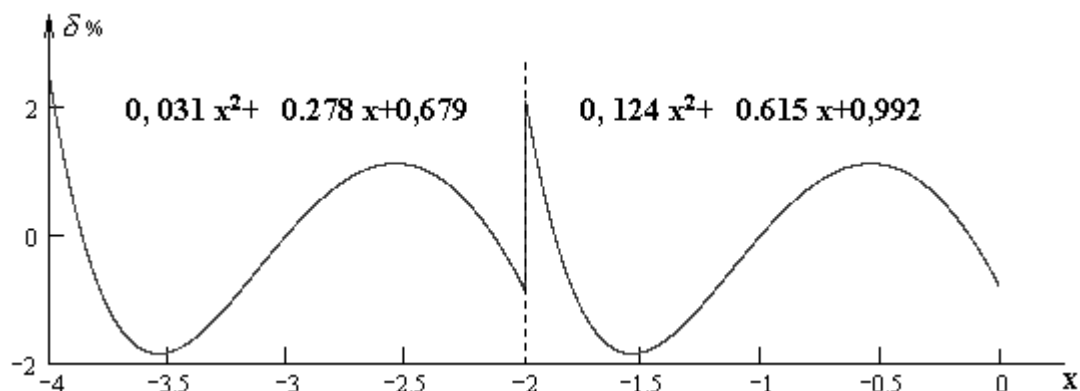


Рисунок 3 — Відносна похибка при апроксимації функції  $\cos^n \lambda$  поліномами Чебішева другої степені на відрізку  $[-4, 0]$

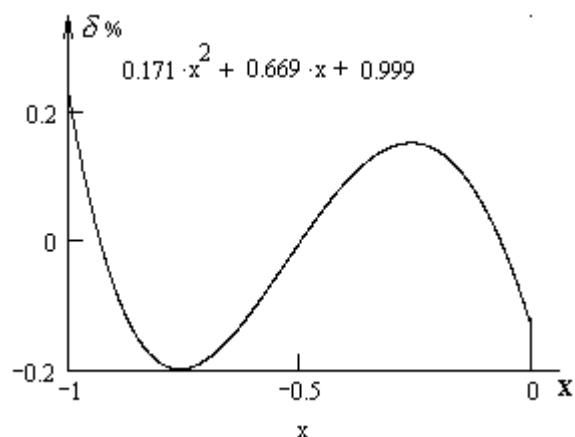


Рисунок 4 — Відносна похибка апроксимації функції  $\cos^n \lambda$  поліномом Чебішева другої степені на відрізку  $[-1, 0]$

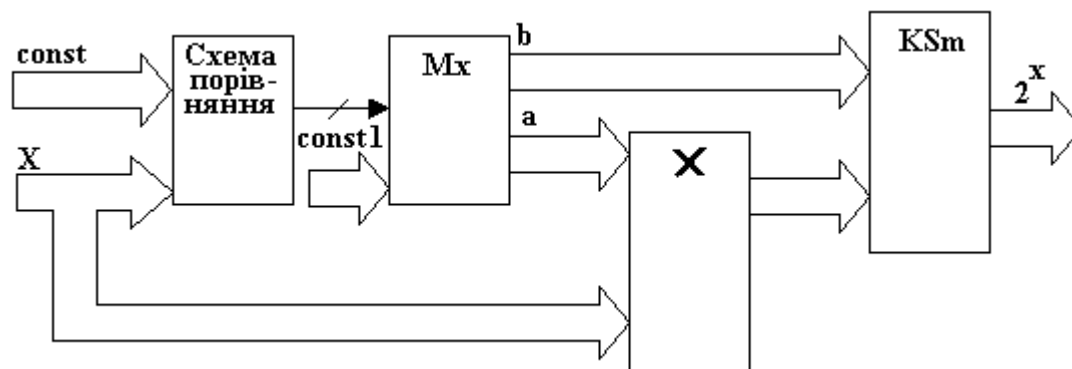


Рисунок 5 — Структурна схема блока визначення  $2^x$

Визначимо крок квантування функції  $\log_2(\cos \lambda)$ . Якщо задано відносну похибку апроксимації  $\delta$ , то

$$\frac{\log_2 \cos(\lambda + h) - \log_2 \cos \lambda}{\log_2 \cos \lambda} \leq \delta.$$

Із останньої нерівності знаходимо що

$$h \leq -f + \cos \lambda \cdot \arccos(e^{\delta \cdot \ln \lambda}).$$

Відрізок  $[0,1]$  зміни функції  $\log_2(\cos \lambda)$  доцільно розбити на два, які мають різну кількість відліків. Перший з відрізків  $[1, 0,99375]$  відповідає епіцентру відблиску, а тому вимагає окремого виділення. На відрізку  $[0,99375, 0]$  інтенсивність кольору в зоні відблиску монотонно падає.

Аналіз показав, що, наприклад, для забезпечення відносної похибки в 0,5% необхідно 240 відліків для першого підінтервалу і 495 для другого, що в сумі складає 735 відліків.

Визначимо максимальну розрядність  $\mu$  представлення дискретних значень відліків при квантуванні функції  $\log_2(\cos \lambda)$  за умови, що має місце обмеження на  $\delta$ . Складемо нерівність

$$\log_2 \cos \lambda - \log \cos(\lambda + h) \leq 2^{-k}.$$

Підставляючи замість  $h$  його значення, отримуємо

$$\log_2 \cos \lambda - \log \cos(\lambda + -f + \cos \lambda \cdot \arccos(e^{\delta \cdot \ln \lambda})) \leq 2^{-k}.$$

Звідси

$$k \leq \left\lfloor \frac{-\ln(-p \cdot \frac{\ln(\cos f)}{\ln 2})}{\ln 2} \right\rfloor.$$

З останньої формули були отримані такі значення розрядності для представлення дискретних відліків функції  $\log_2 \cos \lambda$ : при  $\delta = 1\%$   $k = 10$ ; при  $\delta = 0,5\%$   $k = 12$ .

Оцінимо максимальну відносну похибку, яка має місце за рахунок апроксимації функції  $\cos^n \lambda$  функцією  $2^{n \cdot \log_2(\cos \lambda)}$  з урахуванням всіх етапів перетворень.

Нехай  $\Delta_1$  — абсолютна похибка, яка має місце при квантуванні функції  $\log_2(\cos \lambda)$ . Враховуючи, що коефіцієнт спекулярності є цілим числом, то абсолютна похибка визначення добутку  $n \cdot \log_2(\cos \lambda)$  буде дорівнювати  $n \cdot \Delta_1$ .

Для визначення функції  $2^x$  отримано апроксимаційні формули (2). Найбільше значення кутового коефіцієнта нахилу апроксимаційного відрізка прямої, як і відносної похибки апроксимації, має місце для першого інтервалу. У виразі  $0,497 \cdot x + 0,977$  аргумент  $x = n \cdot \log_2(\cos \lambda)$  визначено з похибкою. Якщо величину  $x$  отримано з похибкою  $\Delta x$  і

використано для розрахунку функції  $P(x)$ , то абсолютна похибка  $\Delta P = \left| \frac{dP}{dx} \right| \Delta x$ . У зв'язку з

цим абсолютна похибка визначення  $0,497 \cdot x + 0,977$  буде дорівнювати  $|0,497 \cdot n \cdot \Delta_1|$ .

Враховуючи, що максимальна абсолютна похибка, яка має місце за рахунок апроксимації функції  $2^x$  функцією  $0,497 \cdot x + 0,977$ , дорівнює 0,022, то максимальна абсолютна похибка всіх перетворень дорівнює  $\max |0,497 \cdot n \cdot \Delta_1| + 0,022$ . Відносна похибку, яка має місце за рахунок усіх апроксимаційних перетворень, визначається за формулою:

$$\delta \leq \frac{\max |0,497 \cdot n \cdot \delta_1 \cdot \log(\cos \lambda) + 0,022}{\cos^n \lambda}.$$

Безпосереднє моделювання з використанням отриманої формули показало, що для зони, яка включає зміну функції від 1 до 0,75, відносна похибка не перевищує 4 % за умови, що  $\delta_1=1\%$ . Ця зона значно перекриває зону відблиску, до якості якої пред'являються підвищені вимоги по точності відтворення.

### Висновки

Запропонована формула для апроксимації функції  $\cos^n \lambda$  функцією  $2^{n \cdot \log_2(\cos \lambda)}$  дозволяє суттєво зменшити час зафарбовування тривимірних фігур, оскільки вилучається з обчислювального процесу точне обчислення функції  $\cos^n \lambda$  для конкретного значення  $n$  чи її апроксимація, наприклад, поліномами Чебішева, Лежандра та ін.

По відношенню до апроксимаційної формули К.Шліка досягнуто суттєве підвищення точності апроксимації, оскільки в останньому випадку відносна похибка сягає 12% тільки до точки перегину BRDF. Крім того, при апроксимації  $\cos^n \gamma$  за цією формулою використовують операцію ділення, що ускладнює апаратну реалізацію методу.

Запропонований підхід передбачає використання при обчисленні тільки мікрооперацій додавання, порівняння та множення, що по відношенню до підходів [7,8] має значно простішу апаратну реалізацію.

У запропонованому підході, на відмінну від [9] оперують не з кутом, а з його косинусом, який легко знайти через скалярний добуток векторів. Крім того, для обчислення використовуються менші обсяги постійної пам'яті.

Отримані у статті результати можуть бути використані для побудови високопродуктивних засобів комп'ютерної графіки.

### Література

1. Gouraud H. Continuous shading of curved surfaces // IEEE Trans. on Comp. — №6. — June 1971. — Pp. 623–628.
2. Phong B.T. Illumination for computer generated images // Comm. of the ACM. — 18(6). — June 1975. — Pp. 311–317.
3. Херн Д., Павлин Бейкер М. Компьютерная графика и стандарт OpenGL. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 1168 с.
4. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 512 с.
5. Blinn J. F. Models of light reflection for computer synthesized pictures // Computer Graphics. — Vol. 11. — 1977. — Pp. 192–198.
6. Shin H., Lee J., Kim L. A Hardware Cost Minimized Fast Phong Shader // IEEE Transactions on VLSI System. — April 2000. — Pp. 310–333.
7. Chrictophe Schlick A Fast Alternative to Phong's Specular Model // Graphics Gems IV. Academic Press. — 1994. — Pp. 404–409.
8. Lyon R.F. Phong Shading Reformulation for Hardware Renderer Simplification // Apple Technical Report №43. — 1993.
9. Романюк О.Н, Чорний А.В. Новий підхід до визначення спекулярної складової кольору // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. — 2004. — С. 85–92.
10. Blake E.H., Disselkoe V.C., Kuijk A.A. Faster Phong shading // Computer Graphics Forum. — vol 6. — 1991. — Pp. 115–131.
11. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. — Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, 1976. — 328 с.